æ

EGZAMIN, Topologia I, 06.02.20, TEMAT

UWAGA: Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę z rozwiązaniami podpisujemy podając: imię i nazwisko, numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej i nazwisko prowadzącego oraz temat kolokwium (A lub B). **Dla wszystkich odpowiedzi należy podać uzasadnienie.**

Zadanie 1. A. (15pkt). Dla dowolnej liczby rzeczywistej a niech $X(a) = \{f \in C[0,1] \mid f(0) = a\}$. Udowodnij, że $X(a)$ jest zbiorem domkniętym i brzegowym w przestrzeni metrycznej $(C[0,1], d_{sup})$.

B. (10pkt). Niech $X = \bigcup_{q \in Q} X(q)$, gdzie . Udowodnij, że podprzestrzeń X przestrzeni $(C[0,1], d_{sup})$ nie jest metryzowalna w sposób zupełny.

Zadanie 2. Niech S_n będzie odcinkiem domkniętym na płaszczyźnie euklidesowej R^2 o końcach $(-1/n, 1/n)$ i $(-1/n, 1)$ i niech T będzie brzegiem trójkąta o wierzchołkach $(1,1)$, $(0,0)$ i $(-1,1)$.

A. (15pkt). Pokaż, że podprzestrzeń płaszczyzny

$$X = T \ \cup \ \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \ \cup \ \{(0,q) \mid q \in Q \ i \ 0 \leq q \leq 1\}$$

jest spójna ale nie jest łukowo spójna.

B. (10pkt). Niech $Y = \bar{X}$ będzie domknięciem X na płaszczyźnie euklidesowej. Udowodnij, że Y nie jest przestrzenią ściągalną.

Wskazówka: Niech $C = \{(x,y) \in Y \mid 0 \leq x\}$. Określ przekształcenie ciągłe $f : Y \to C$ takie, że $f(c) = c$ dla $c \in C$.

Zadanie 3. Niech $S^1 = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, niech $A = \{(0,-1), (0,1)\}$ będzie zbiorem dwupunktowym i niech $B = A \cup \{(1,0)\}$.

A. (15pkt). Pokazać, że przestrzenie ilorazowe S^1/A i S^1/B są niehomeomorficznymi przestrzeniami Hausdorffa.

B. (10pkt). Wskazać zbiór domknięty X w przestrzeni S^1/A i przekształcenie ciągłe $f : X \to D^2$ na brzeg dysku $D^2 = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ takie, że przestrzeń $(S^1/A) \cup_f D^2$ jest homotopijnie równoważna z S^1.

Zadanie 4. Niech $s_0 \in S^1$ będzie ustalonym punktem na okręgu i niech $S^2 = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ będzie sferą.

A. (10pkt). Udowodnij, że przestrzeń ilorazowa $S^1 \times I / S^1 \times \{0\}$ jest homeomorficzna z półsferą $S^2_+ = \{(x,y,z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$.

B. (15pkt). Niech $X = \{(a,b) \in S^1 \times S^1 \mid a = s_0 \ \ lub \ \ b = s_0\}$. Udowodnij, że przestrzeń ilorazowa $S^1 \times S^1 / X$ jest homeomorficzna ze sferą S^2.